



โครงงาน

เรื่อง

การประยุกต์ลาปลาซสองชั้นในการหาคำตอบของสมการคลื่น - ชเรอดิงเงอร์

Application Double Laplace Transform for Solving
Wave-Schrödinger Equations

นำเสนอโดย

นายธราเทพ แซ่ม้า รหัสนักศึกษา 6604105307

นายสิทธิเรศ พรหมบุตร รหัสนักศึกษา 6604105317

นายวราเทพ เหมทานนท์ รหัสนักศึกษา 6604105328

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา 10305492 โครงงาน

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยแม่โจ้

โครงงาน
เรื่อง
การประยุกต์ลาปลาซสองชั้นในการหาคำตอบของสมการคลื่น - ชเรอดิงเงอร์
Application Double Laplace Transform for Solving
Wave-Schrödinger Equations

นำเสนอโดย
นายธราเทพ แซ่ม้า รหัสนักศึกษา 6604105307
นายสิทธิพร พรหมบุตร รหัสนักศึกษา 6604105317
นายวราเทพ เหมทานนท์ รหัสนักศึกษา 6604105328

วันจักร สาทสนิท อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร.วันจักร สาทสนิท)
Am 2 อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กมลเทพ มีคำ)

สารบัญ

บทคัดย่อ (ภาษาไทย)	iii
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ)	iv
กิตติกรรมประกาศ	v
1 บทนำ	1-3
2 ความรู้พื้นฐาน	4-12
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations)	4
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equations)	4-5
2.3 อนุกรมเทย์เลอร์และแมคลอริน (Taylor Series and Maclaurin Series)	5-11
2.4 ผลการแปลงลาปลาซสองชั้นผกผัน (Inverse Laplace Transform)	12
3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	15-18
3.1 ระเบียบวิธีการแปลงลาปลาซสองชั้นหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	13-15
3.2 พหุนามมอดิเมียน (Adomian polynomials)	16-18
4 งานวิจัยที่ศึกษา	19-36
4.1 ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์เชิงเส้นใน 1 มิติแบบเอกพันธ์	19-20
4.2 ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์เชิงเส้นใน 1 มิติแบบไม่เอกพันธ์	21-22
4.3 ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติแบบเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	23-24
4.4 ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติแบบไม่เชิงเส้นไม่เอกพันธ์	25-26
4.5 ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติแบบไม่เชิงเส้น	27-30
4.6 ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติแบบไม่เอกพันธ์	31-33
4.7 ตัวอย่างที่ 7 สมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติไม่เชิงเส้นแบบเอกพันธ์	34-36
5 บทสรุป	37
6 บรรณานุกรม	38

ชื่อ-สกุล

นายธราเทพ แซ่มา รหัสนักศึกษา 6604105307
 นายสิทธิเรศ พรหมบุตร รหัสนักศึกษา 6604105317
 นายวราเทพ เหมทานนท์ รหัสนักศึกษา 6604105328

อาจารย์ที่ปรึกษา

รองศาสตราจารย์ ดร.วันจักร สาทสนิท
 ผู้ช่วยศาสตราจารย์กมลเทพ มีคำ

หัวข้อโครงการ

การประยุกต์ลาปลาซสองชั้นในการหาคำตอบของสมการคลื่น - ชเรอดิงเงอร์

Application Double Laplace Transform for Solving Wave-Schrödinger Equations

บทคัดย่อ

งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซสองชั้นแบบแยกส่วนในการหาคำตอบสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น วิธีนี้เป็นการรวมวิธีการแปลงลาปลาซสองชั้นและการแยกส่วนโดเมียน ผลลัพธ์ของตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่เข้าใจง่ายและมีประสิทธิภาพ

Student Name Tharathep Saema Student ID 6604105307
Sikares Prombut Student ID 6604105317
Warathep Hamtanon Student ID 6604105328

Adivisor Assoc. Prof. Dr. Wanchak Satsanit
Asst. Prof. Kamonthep Mecam

Independent Study Topic

Application Double Laplace Transform for Solving
Wave–Schrödinger Equations

Abstract

In this paper, we have applied Double Laplace transform for solving linear and non-linear Wave-Schrödinger equation. This method is a combination Double Laplace method and Adomian decomposition method. The result to illustrate the simplicity and the effective of the method

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ลาปลาซสองชั้นในการหาคำตอบของสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี และ ขอบพระคุณ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ รองศาสตราจารย์ ดร.วันจักร สาทสนิท และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ กมลเทพ มีคำ ที่ให้คำแนะนำ เสนอ แนวทาง ตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องให้คณะผู้จัดทำโครงการโดยตลอด ทางคณะผู้จัดทำโครงการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ลาปลาซสองชั้นในการหาคำตอบของสมการคลื่น - ชเรอดิงเงอร์ ที่จัดทำขึ้นจะเป็นผลประโยชน์แก่ผู้สนใจที่จะนำไปศึกษาต่อในประเด็นที่ได้เสนอแนะไว้ในโครงการฉบับนี้ให้บรรลุผลอย่างมีประสิทธิภาพต่อไป

บทที่ 1

บทนำ

ปรากฏการณ์ในธรรมชาติส่วนใหญ่ล้วนอธิบายโดย สมการเชิงอนุพันธ์แล้วสมการเชิงอนุพันธ์สามารถจำแนกได้เป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ โดยพิจารณาจากจำนวนของตัวแปรต้น ได้แก่สมการเชิงอนุพันธ์แบบสามัญ (Ordinary differential equation) เป็นสมการที่มีตัวแปรต้น 1 ตัว และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) เป็นสมการที่มีตัวแปรต้นหลายตัว นอกจากนั้นยังได้มีการแยกชนิดของสมการโดยพิจารณารูปแบบของสมการเหล่านั้น เช่น สมการอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear differential equation) และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเกิดขึ้นในปัญหาทางด้านฟิสิกส์หรือทางด้านคณิตศาสตร์ เมื่อฟังก์ชันในปัญหาเหล่านั้นจะขึ้นอยู่กับตัวแปรต้นจำนวนตั้งแต่สองตัวขึ้นไป เช่น ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งและของไหล ปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น และในส่วน of ตัวแปรต้นหลายตัวนั้น มักจะมีตัวหนึ่งเป็นเวลา (แทนด้วย t) ส่วนตัวแปรต้นอื่นๆ จะเป็นพิกัดของตำแหน่งในสเปซ (Space) ของปัญหานั้นๆ

ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เป็นการแปลงเชิงปริพันธ์ที่ใช้กันอย่างกว้างขวางและอยู่ในรูปปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ซึ่งเหมาะที่จะใช้ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า โดยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) มีจำนวนเท่ากับอันดับของสมการ ทั้งสมการเชิงอนุพันธ์จะถูกแปลงเป็นสมการพีชคณิต หลังจากนั้น สามารถหาคำตอบเฉพาะได้โดยไม่ผ่านขั้นตอนการหาคำตอบทั่วไป ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นที่ปรากฏในหลายพื้นที่ของการวิจัยทางวิทยาศาสตร์ เช่น ฟิสิกส์ สถานะของแข็ง สมการคลื่น สมการโทรเลข ฟิสิกส์พลาสมา กลศาสตร์ของไหล ซึ่งถูกจำลองโดยสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น นอกจากนี้ยังมีการแปลงลาปลาซคู่เพื่อแก้ปัญหสมการอนุพันธ์เชิงเส้นทั่วไป สมการโทรเลขและสมการคลื่นพร้อมเงื่อนไขเริ่มต้นและขอบเขต

สมการคลื่น (Wave equation) เป็นหนึ่งในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีความสำคัญในด้าน คณิตศาสตร์ ประยุกต์ ฟิสิกส์ และวิศวกรรม สมการคลื่นไม่เพียงแต่อธิบายการเคลื่อนที่ของเส้นเชือกและลวดเท่านั้น แต่ยังอธิบายถึงการเคลื่อนที่ของพื้นผิวของของเหลว เช่น คลื่นนิ่ง เป็นต้น และยังอธิบายถึงคลื่นกล เช่น คลื่นเสียง และคลื่นแผ่นดินไหว เป็นต้น รวมไปถึงอธิบายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และพลศาสตร์ของของไหล

สมการคลื่นใน 1 มิติ คือ สมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{หรือ} \quad \square u = 0$$

โดยที่ $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ และ c เป็นค่าคงตัว

สมการชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger equation) คือ สมการพื้นฐานในกลศาสตร์ควอนตัม ใช้เพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงสถานะควอนตัมของระบบฟิสิกส์ โดยเฉพาะอนุภาคขนาดเล็ก เช่น อิเล็กตรอน เป็นต้น

สมการชเรอดิงเงอร์ ใน 1 มิติ แบบเชิงเส้น คือสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$u_t = i u_{xx} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

โดยที่ $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ และ $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

สมการชเรอดิงเงอร์ ใน 1 มิติ แบบไม่เชิงเส้น คือสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$u_t = i u_{xx} - 2|u|^2 u \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

โดยที่ $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ และ $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ในหลายปีที่ผ่านมา มีนักวิจัยหลายท่านได้พัฒนาวิธีการแปลงลาปลาซสองชั้นในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ทั้งแบบเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น เช่น [M.R. Lemmouar, L. El Hakki] ศึกษาคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซสองชั้น [1], [Ranjit Ramkrishna Dhunde และคณะ] [2] ศึกษาการหาคำตอบของสมการโทรเลขโดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซสองชั้น, [Hami Gundogdu, Omer Faruk Gozukizil] [3], ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการ Hirota, สมการชเรอดิงเงอร์ และสมการ KdV โดยวิธีการแปลงลาปลาซสตาร์ช เป็นต้น

นิยามผลการแปลงลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองมาจากนิยามการแปลงลาปลาซของ อนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับตัวแปร x และ t ดังนี้

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx$$

ดังนั้นเราจะได้

$$L_x L_t \{f(x, t)\} = F(p, s) = \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt dx$$

จากนั้นเราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับตัวแปร x และ t ดังนี้

$$L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\} = pU(p, s) - u(0, s)$$

$$L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} = sU(p, s) - u(p, 0)$$

และในทำนองเดียวกันนั้นเราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับตัวแปร x และ t ดังนี้

$$L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} = p^2 U(p, s) - pU(0, s) - \frac{\partial U(0, s)}{\partial x}$$

$$L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right\} = s^2 U(p, s) - sU(p, 0) - \frac{\partial U(p, 0)}{\partial t}$$

ในโครงงานนี้จะนำการแปลงลาปลาซมาใช้หาผลเฉลยของสมการคลื่น - ชเรอดิงเงอร์ (Wave-Schrödinger equation) โดยแบ่งพิจารณาดังนี้

แบบที่ 1: สมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติ แบบเชิงเส้นและแบบเอกพันธ์

$$u_{tt} = iu_{xx} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น: } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

แบบที่ 2: สมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติแบบไม่เอกพันธ์

$$u_{tt} = iu_{xx} + f(x, t) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น: } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

แบบที่ 3: สมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติแบบไม่เชิงเส้น

$$u_{tt} = iu_{xx} + uu_x - u_x^2 \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น: } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

แบบที่ 4: สมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

$$u_{tt} = i(u_{xx} + u_{yy}) + k(uu_x + uu_y) - m(u_x^2 + u_y^2) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น: } u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$$

โดยที่ $k, m \in \mathbb{R}$ ซึ่งหาก $k = m = 0$ จะได้ผลเฉลยแบบเชิงเส้น และหาก $k, m \neq 0$ จะได้ผลเฉลยแบบไม่เชิงเส้น

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations)

นิยามที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ (independent variable) ตัวแปรตาม (dependent variable) และอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระนั้นๆ

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations, ODEs) คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระหนึ่งตัว

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations, PDEs) คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว

ตัวอย่างเช่น

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x^4 = \sin(2t)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{x^2 - 2y}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equations)

บทนิยาม 2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = g(x) \quad (1.1)$$

เมื่อ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x โดยที่ $a_0 \neq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น คือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ข้อสังเกต สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

1. ทุกๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามในสมการ

ตัวอย่างเช่น

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2uv + u$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

บทนิยาม 3 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์ (Homogeneous Differential Equations) หมายถึง สมการ (1.1) เมื่อ $g(x) = 0$

บทนิยาม 4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous Differential Equations) หมายถึง สมการ (1.1) เมื่อ $g(x) \neq 0$

2.3 อนุกรมเทย์เลอร์และแมคลอริน (Taylor Series and Maclaurin Series)

บทนิยาม 5 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ที่จุด $a = 0$ แล้วจะเรียกอนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} (x) + \frac{f''(0)}{2!} (x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n + \cdots$$

ว่า อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin Series)

บทนิยาม 6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ณ จุด $x = a$ แล้วเรียกอนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

ว่า อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

ตัวอย่าง

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad |x| < \infty$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |x| < \infty$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad |x| < \infty$
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |x| < \infty$
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad |x| < \infty$

การแปลงลาปลาซสองชั้นของตัวแปร x และ t นิยามดังนี้

$$L_x L_t \{f(x, t)\} = F(p, s) = \int_0^{\infty} e^{-px} \int_0^{\infty} e^{-st} f(x, t) dt dx \quad (1.2)$$

โดยที่ $x, t > 0$ และ p, s คือค่าเชิงซ้อน

จากนิยาม

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ L\{f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$L_x L_t\{f(x, t)\} = F(p, s) = \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt dx$$

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $f(x, t) = xe^t$ จงหา $L[f(x, t)]$

วิธีทำ จากนิยาม

$$\begin{aligned} L_x L_t[f(x, t)] &= \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt dx \\ L_x L_t[xe^t] &= \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} xe^t dt dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-px} \int_0^\infty e^{-(s-1)t} dt dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-px} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-(s-1)t} dt \right] dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-px} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)} \right)_0^k \right] dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-px} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-1)k}}{-(s-1)} \right) + \frac{e^0}{s-1} \right] dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-px} \frac{1}{s-1} dx \\ &= \frac{1}{s-1} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k xe^{-px} dx \right] \\ &= \frac{1}{s-1} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^{-px}}{-p} - \frac{e^{-px}}{p^2} \right)_0^k \right] \\ &= \frac{1}{s-1} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{ke^{-pk}}{-p} - \frac{e^{-pk}}{p^2} \right) - \left(\frac{0}{-p} - \frac{e^0}{p^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{s-1} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{-pe^{pk}} - \frac{1}{p^2 e^{pk}} \right) + \frac{1}{p^2} \right] \\ &= \left[\frac{1}{s-1} \right] \left[\frac{1}{p^2} \right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $L_x L_t[xe^t] = \frac{1}{p^2(s-1)}$

ตารางที่ 1: ตัวอย่างผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน

$f(t)$	$L\{f(t)\}$	นิยามของขอบเขต
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
k (k เป็นค่าคงที่)	$\frac{k}{s}$	$s > 0$
$t^n, n \in \mathbb{I}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^n, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $

ตารางที่ 2 : ผลการแปลงลาปลาซสองชั้น

$f(x, t)$	$L\{f(x, t)\} = F(p, s)$
ab	$\frac{ab}{ps}, a, b$ เป็นค่าคงที่
$x^n t^m$	$s^{-1-m} p^{-n-1} \Gamma(1+n) \Gamma(1+m)$
$x^n t^m e^{-ax-bt}$	$(s+b)^{-1-m} (p+a)^{-n-1} \Gamma(1+n) \Gamma(1+m)$
e^{-ax-bt}	$\frac{1}{(p+a)(s+b)}$
$\cos(x) \cos(t)$	$\frac{sp}{(1+p^2)(1+s^2)}$
$\sin(x) \sin(t)$	$\frac{1}{(1+p^2)(1+s^2)}$
$\sin(x+t)$	$\frac{1-ps(p+s)}{(1+p^2)(1+s^2)}$
$\cos(x+t)$	$-\frac{p+s-ps}{(1+p^2)(1+s^2)}$

ต่อไปนี้จะเป็นการหาลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับตัวแปร x ให้

$$f(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

จากนิยามการแปลงลาปลาซสองชั้น

$$\begin{aligned} L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\} &= \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt dx \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx dt \end{aligned} \quad (1.3)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-px} u(x, t) \Big|_0^A + \int_0^A p e^{-px} u(x, t) dx \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-pA} u(A, t) - e^0 u(0, t)] + p \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-px} u(x, t) dx \\ &= p \int_0^\infty e^{-px} u(x, t) dx - u(0, t) \\ &= pU(p, t) - u(0, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

แทนค่าสมการ (1.4) ในสมการ (1.3) จะได้

$$\begin{aligned} L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\} &= \int_0^\infty e^{-st} [pU(p, t) - u(0, t)] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} pU(p, t) dt - \int_0^\infty e^{-st} u(0, t) dt \\ &= p \int_0^\infty e^{-st} U(p, t) dt - \int_0^\infty e^{-st} u(0, t) dt \\ L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\} &= pU(p, s) - U(0, s) \end{aligned} \quad (1.5)$$

ในทำนองเดียวกันเราจะหาการแปลงลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับตัวแปร t ให้

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \\ L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} &= \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-st} u(x, t) \Big|_0^A + s \int_0^A e^{-st} u(x, t) dt \right] \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-sA} u(x, A) - e^{-s(0)} u(x, 0)] + s \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} u(x, t) dt \\
 &= s \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt - u(x, 0) \\
 &= sU(x, s) - u(x, 0)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

แทนค่าสมการ (1.7) ในสมการ (1.6) จะได้

$$\begin{aligned}
 L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} &= \int_0^\infty e^{-px} [sU(x, s) - u(x, 0)] dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-px} sU(x, s) dx - \int_0^\infty e^{-px} u(x, 0) dx \\
 &= s \int_0^\infty e^{-px} U(x, s) dx - \int_0^\infty e^{-px} u(x, 0) dx \\
 L_x L_t \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} &= sU(p, s) - U(p, 0)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

การแปลงลาปลาซสองชั้นสำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเทียบกับตัวแปร x และ t ดังนั้นแทนค่าสมการการแปลงลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเทียบกับตัวแปร x

$$\begin{aligned}
L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} &= \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dt dx \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx dt
\end{aligned} \tag{1.9}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-px} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_0^A + p \int_0^A e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right] \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-pA} \frac{\partial u(A, t)}{\partial x} - e^0 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right] + p \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \\
&= -\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + p \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \\
&= p \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \\
&= p[pU(p, t) - u(0, t)] - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \\
&= p^2 U(p, t) - pu(0, t) - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

แทนค่าสมการ (1.10) ในสมการ (1.9) จะได้

$$\begin{aligned}
L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left[p^2 U(p, t) - pu(0, t) - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right] dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} p^2 U(p, t) dt - \int_0^\infty e^{-st} pu(0, t) dt - \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} dt \\
&= p^2 \int_0^\infty e^{-st} U(p, t) dt - p \int_0^\infty e^{-st} u(0, t) dt - \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} dt \\
L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} &= p^2 U(p, s) - pU(0, s) - \frac{\partial U(0, s)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

การแปลงลาปลาซสองชั้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเทียบกับตัวแปร t

$$L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px} e^{-st} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt dx \tag{1.12}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_0^A + s \int_0^A e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \right] \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-sA} \frac{\partial u(x, A)}{\partial t} - e^{-s(0)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right] + s \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \\
 &= -\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + s \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \\
 &= s \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \\
 &= s[sU(x, s) - u(x, 0)] - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \\
 &= s^2 U(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

แทนค่าสมการ (1.13) ใน (1.12) จะได้

$$\begin{aligned}
 L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right\} &= \int_0^\infty e^{-px} \left[s^2 U(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right] dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-px} s^2 U(x, s) dx - \int_0^\infty e^{-px} su(x, 0) dx - \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} dx \\
 &= s^2 \int_0^\infty e^{-px} U(x, s) dx - s \int_0^\infty e^{-px} u(x, 0) dx - \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} dx \\
 L_x L_t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right\} &= s^2 U(p, s) - sU(p, 0) - \frac{\partial U(p, 0)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

2.4 ผลการแปลงลาปลาซสองชั้นผกผัน (Inverse Laplace Transform)

นิยาม 8 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีผลการแปลงลาปลาซเป็น $F(p, s)$ แล้วเรียก $f(x, t)$ ว่าผลการแปลงผกผัน (Inverse laplace) ของฟังก์ชัน $F(p, s)$ เขียนแทนด้วย $L^{-1}\{F(p, s)\}$ จากนิยามข้างต้นจะได้ว่าถ้า $L\{f(x, t)\} = F(p, s)$ แล้ว $f(x, t) = L^{-1}\{F(p, s)\}$

ตารางที่ 2 : ผลการแปลงลาปลาซสองชั้นผกผัน

$L\{f(x, t)\} = F(p, s)$	$f(x, t) = L^{-1}F(p, s)$
$\frac{ab}{ps}, a, b$ เป็นค่าคงที่	ab
$s^{-1-m}p^{-n-1}\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)$	$x^n t^m$
$(s+b)^{-1-m}(p+a)^{-n-1}\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)$	$x^n t^m e^{-ax-bt}$
$\frac{1}{(p+a)(s+b)}$	e^{-ax-bt}
$\frac{sp}{(1+p^2)(1+s^2)}$	$\cos(x) \cos(t)$
$\frac{1}{(1+p^2)(1+s^2)}$	$\sin(x) \sin(t)$
$\frac{1-ps(p+s)}{(1+p^2)(1+s^2)}$	$\sin(x+t)$
$-\frac{p+s-ps}{(1+p^2)(1+s^2)}$	$\cos(x+t)$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงาน

3.1 ระเบียบวิธีการแปลงลาปลาซสองชั้นหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

จุดประสงค์ของส่วนนี้คือการศึกษากการใช้ระเบียบวิธีการแปลงลาปลาซสองชั้นที่ดัดแปลงสำหรับอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น เราพิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นอันดับสองที่มีเงื่อนไขเบื้องต้นดังนี้

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = h(x, t) \quad (2.1)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = g(t) \quad (2.2)$$

โดยที่ L แทนด้วยตัวดำเนินการอันดับสอง $L = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, R เรียกว่า พจน์เชิงเส้น N หมายถึงพจน์ที่ไม่ใช่เชิงเส้น และพจน์ $h(x, t)$ คือฟังก์ชันที่กำหนดให้

ใส่ผลการแปลงลาปลาซสองชั้นทั้งสองด้านของสมการ (2.1) และอาศัยคุณสมบัติเชิงเส้น

$$L_x L_t \{Lu(x, t)\} + L_x L_t \{Ru(x, t)\} + L_x L_t \{Nu(x, t)\} = L_x L_t \{h(x, t)\} \quad (2.3)$$

ขั้นตอนแรก เราใช้คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสอง เราจะได้

$$p^2 U(p, s) - pU(0, s) - \frac{\partial U(0, s)}{\partial x} + L_x L_t \{Ru(x, t)\} + L_x L_t \{Nu(x, t)\} = L_x L_t \{h(x, t)\}$$

$$p^2 U(p, s) - pF(s) - G(s) + L_x L_t \{Ru(x, t)\} + L_x L_t \{Nu(x, t)\} = L_x L_t \{h(x, t)\}$$

$$p^2 U(p, s) = pF(s) + G(s) - L_x L_t \{Ru(x, t)\} - L_x L_t \{Nu(x, t)\} + L_x L_t \{h(x, t)\}$$

$$U(p, s) = \frac{F(s)}{p} + \frac{G(s)}{p^2} - \frac{1}{p^2} L_x L_t \{Ru(x, t)\} - \frac{1}{p^2} L_x L_t \{Nu(x, t)\} + \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \quad (2.4)$$

ขั้นตอนที่สอง หาผลเฉลยการแปลงลาปลาซสองชั้นผกผันทั้งสองข้างของสมการ (2.4) จะได้

$$\begin{aligned} u(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \{U(p, s)\} \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{p} + \frac{G(s)}{p^2} - \frac{1}{p^2} L_x L_t \{Ru(x, t)\} - L_x L_t \{Nu(x, t)\} + \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \right\} \end{aligned}$$

ในการแยกลาปลาซจะใช้ $u(x, t)$ อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ ดังนี้

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

พจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นกำหนด ดังนี้

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

โดยที่ A_n เป็นพหุนามอดเมียนที่กำหนดโดย

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

จากสมการ (2.4)

$$U(p, s) = \frac{F(s)}{p} + \frac{G(s)}{p^2} - \frac{1}{p^2} L_x L_t \left\{ R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right\} + \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \quad (2.5)$$

ต่อไปเราใช้การแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองด้านของสมการเราจะได้

$$\begin{aligned} L_p^{-1} L_s^{-1} \{U(p, s)\} &= L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{p} \right\} + L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{p^2} \right\} \\ &\quad - L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \left\{ R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right\} \right\} \\ &\quad + L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) &= f(t) + xg(t) - L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \left\{ R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right\} \right\} \\ &\quad + L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots &= f(t) + xg(t) + L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \right\} \\ &\quad - L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{R(u_0) + A_0\} \right\} \\ &\quad - L_p^{-1} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{R(u_1) + A_1\} \right\} + \dots \quad (2.6) \end{aligned}$$

จากคุณสมบัติเชิงเส้น

$$\begin{aligned}
 u_0 &= f(t) + xg(t) + L_p^{-1}L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{h(x, t)\} \right\} \\
 u_1 &= -L_p^{-1}L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{R(u_0) + A_0\} \right\} \\
 u_2 &= -L_p^{-1}L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{R(u_1) + A_1\} \right\} \\
 &\vdots \\
 u_{n+1} &= -L_p^{-1}L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{R(u_n) + A_n\} \right\}
 \end{aligned}$$

จากข้างต้นจะได้ความสัมพันธ์แบบเวียนเกิด (Recurrence Relation)

$$u_{n+1} = -L_p^{-1}L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} L_x L_t \{R(u_n) + A_n\} \right\}$$

ก่อนอื่นเราจะใช้การแปลงลาปลาซสองชั้นของข้อตกลงทางด้านขวาของสมการ จากนั้นใช้การแปลงลาปลาซผกผันสองชั้นกับเราจะได้ค่า $u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ ตามลำดับ เพื่อแสดงให้เห็นถึงวิธีการที่นำเสนอข้างต้นสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น

3.2 พหุนามมอดูเลียน (Adomian polynomials) พิจารณาเทอมที่อยู่ในรูปไม่เชิงเส้น $N(u)$

ของสมการหรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น เช่น $u^2, u^3, u^4, \sin u, e^u, u_x, u_x^2$ เป็นต้น สามารถเขียนในรูปของอนุกรมอนันต์ได้ ดังนี้

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

โดยที่ $A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ เป็นพหุนามมอดูเลียน $N(u)$ สามารถคำนวณได้โดย

$$A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \forall n \geq 0$$

พหุนามมอดูเลียน $A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ สามารถเขียนกระจายให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{0!} [N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots)]_{p=0} \\ &= N(u_0) \\ A_1 &= \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial p} N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots) \right]_{p=0} \\ &= \frac{1}{1!} [(u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots) N'(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots)]_{p=0} \\ &= N'(u_0)u_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots) \right]_{p=0} \\ &= \frac{1}{2!} [(2u_2 + 6pu_3 + 12p^2u_4 + \dots) N'(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots) \\ &\quad + (u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots)^2 N''(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots)]_{p=0} \\ &= N'(u_0)u_2 + \frac{1}{2!} N''(u_0)u_1^2 \\ A_3 &= \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3}{\partial p^3} N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots) \right]_{p=0} \\ &= \frac{1}{3!} [(2u_2 + 6pu_3 + 12p^2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots) N''(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) \\ &\quad + (6u_3 + 24p + \dots) N'(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) \\ &\quad + (u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots)^2 (u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots) N'''(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) \\ &\quad + 2(u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots)(2u_2 + 6pu_3 + 12p^2 + \dots) N''(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)]_{p=0} \\ &= N'(u_0)u_3 + N''(u_0)u_1u_2 + \frac{1}{3!} N'''(u_0)u_1^3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 พหุนามอโตเมียน ของพจน์ไม่เชิงเส้น uu_x

$$\begin{aligned}
n = 0; A_0 &= [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x]_{p=0} \\
&= u_0u_{0x} \\
n = 1; A_1 &= \left[\frac{d}{dp} ((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x) \right]_{p=0} \\
&= [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \\
&\quad + [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x(u_1 + 2pu_2 + \dots)]]_{p=0} \\
&= u_0u_{1x} + u_1u_{0x} \\
n = 2; A_2 &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dp^2} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x \right]_{p=0} \\
&= \frac{1}{2!} \left[\frac{d}{dp} ((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \right. \\
&\quad \left. + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x(u_1 + 2pu_2 + \dots)) \right]_{p=0} \\
&= \frac{1}{2!} [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(2u_2 + \dots)_x \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \\
&\quad + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x(2u_2 + \dots) \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)_x(u_1 + 2pu_2 + \dots)]_{p=0} \\
&= \frac{1}{2!} [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(2u_2 + \dots)_x \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \\
&\quad + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x(2u_2 + \dots) \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)_x(u_1 + 2pu_2 + \dots)]_{p=0} \\
&= \frac{1}{2!} [2u_0u_{2x} + u_1u_{1x} + 2u_2u_{0x} + u_1u_{1x}] \\
&= \frac{1}{2!} [2u_0u_{2x} + 2u_1u_{1x} + 2u_2u_{0x}] \\
&= u_0u_{2x} + u_1u_{1x} + u_2u_{0x} \\
n = 3; A_3 &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dp^3} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x \right]_{p=0} \\
&= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^2}{dp^2} ((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \right. \\
&\quad \left. + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x(u_1 + 2pu_2 + \dots)) \right]_{p=0} \\
&= \frac{1}{3!} \left[\frac{d}{dp} ((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(2u_2 + \dots)_x \right. \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \\
&\quad + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x(2u_2 + \dots) \\
&\quad \left. + (u_1 + 2pu_2 + \dots)_x(u_1 + 2pu_2 + \dots)) \right]_{p=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3!} [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x (6u_3 + \dots)_x + (2u_2 + \dots) \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)_x (2u_2 + \dots) + (u_1 + 2pu_2 + \dots) \\
&\quad + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x (6u_3 + \dots) + (2u_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots)_x \\
&\quad + (u_1 + 2pu_2 + \dots)(2u_2 + \dots)_x + (u_1 + 2pu_2 + \dots)(2u_2 + \dots)_x]_{p=0} \\
\\
A_3 &= \frac{1}{3!} [6u_0u_{3x} + 2u_1u_{2x} + 2u_2u_{1x} + 2u_1u_{2x} + 6u_3u_{0x} + 2u_1u_{2x} + 2u_2u_{1x}] \\
&= \frac{1}{6} [6u_0u_{3x} + 6u_1u_{2x} + 6u_2u_{1x} + 6u_3u_{0x}] \\
&= u_0u_{3x} + u_1u_{2x} + u_2u_{1x} + u_3u_{0x}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 พหุนามอดิเมียนของพจน์ไม่เชิงเส้น u_x^2

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{0!} [(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x^2]_{p=0} \\
&= (u_0)_x^2 \\
\\
A_1 &= \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial p} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x^2 \right]_{p=0} \\
&= [2(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots)_x]_{p=0} \\
&= 2(u_0u_1)_x \\
\\
A_2 &= \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)_x^2 \right]_{p=0} \\
&= \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial p} (2(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + 3p^2u_3 + \dots))_x \right]_{p=0} \\
&= [((u_0 + pu_1 + \dots)(2u_2 + 6pu_3 + \dots) + (u_1 + 2pu_2 + \dots)(u_1 + 2pu_2 + \dots))_x]_{p=0} \\
&= [(u_0)(2u_2) + (u_1)(u_1)]_x \\
&= [2u_0u_2 + u_1^2]_x
\end{aligned}$$

บทที่ 4

งานวิจัยที่ศึกษา

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์เชิงเส้นใน 1 มิติแบบเอกพันธ์

$$u_{tt} = iu_{xx} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = e^x$, $u_t(x, 0) = 0$
จากโจทย์

$$u_{tt} = iu_{xx} \tag{1}$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของ (1)

$$\begin{aligned} L_x L_t \{u_{tt}\} &= L_x L_t \{iu_{xx}\} \\ s^2 U(p, s) - su(p, 0) - u_t(p, 0) &= iL_x L_t \{u_{xx}\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $L_x \{u(x, 0)\} = L_x \{e^x\} = \frac{1}{p-1}$ และ $L_x \{u_t(x, 0)\} = 0$
จะได้

$$s^2 U(p, s) - \frac{s}{p-1} - 0 = iL_x L_t \{u_{xx}\}$$

หารด้วย s^2 ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{s^2} U(p, s) &= \frac{s}{s^2(p-1)} + \frac{i}{s^2} L_x L_t \{u_{xx}\} \\ U(p, s) &= \frac{1}{s(p-1)} + \frac{i}{s^2} L_x L_t \{u_{xx}\} \end{aligned} \tag{2}$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้าง (2)

$$u(x, t) = e^x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx}\} \right] \tag{3}$$

สมมติให้คำตอบของ (3) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ดังนี้

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = e^x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} \right\} \right]$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = e^x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(u_{0xx} + u_{1xx} + \dots)\} \right]$$

จะได้ $u_0(x, t) = e^x$

หา $u_1(x, t)$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{0xx}\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{i}{s^2} \left(\frac{1}{s(p-1)} \right) \right] \\ &= i e^x \left(\frac{t^2}{2!} \right) \end{aligned}$$

หา $u_2(x, t)$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{1xx}\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{i^2}{s^2} \left(\frac{2!}{s^3 \cdot 2!(p-1)} \right) \right] \\ &= i^2 e^x \left(\frac{t^4}{4!} \right) \end{aligned}$$

หา $u_3(x, t)$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{2xx}\} \right] \\ &= i^3 e^x \left(\frac{t^6}{6!} \right) \end{aligned}$$

โดยวิธีการเดียวกันกับข้างต้นจะได้

$$u_4(x, t) = i^4 e^x \frac{t^8}{8!}, u_5(x, t) = i^5 e^x \frac{t^{10}}{10!}, \dots$$

สรุปทั่วไปของ $u_n(x, t)$ คือ

$$u_n(x, t) = i^n e^x \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

และจากข้างต้นจะได้ผลเฉลยของ (1) คือ

$$u(x, t) = e^x + i e^x \frac{t^2}{2!} + i^2 e^x \frac{t^4}{4!} + \dots + i^n e^x \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} i^n e^x \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

ตัวอย่างที่2 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์เชิงเส้นใน1มิติแบบไม่เอกพันธ์

$$u_{tt} = iu_{xx} + \sinh x, \quad i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = \sinh x$, $u_t(x, 0) = \sinh x$

จากโจทย์

$$u_{tt} = iu_{xx} + \sinh x \quad (1)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของ (1)

$$L_x L_t \{u_{tt}\} = L_x L_t \{iu_{xx} + \sinh x\}$$

$$s^2 U(p, s) - su(p, 0) - u_t(p, 0) = L_x L_t \{iu_{xx} + \sinh x\}$$

เนื่องจาก $L_x \{u(x, 0)\} = L_x \{\sinh x\} = \frac{1}{p^2-1}$ และ $L_x \{u_t(x, 0)\} = L_x \{\sinh x\} = \frac{1}{p^2-1}$ จะได้

$$s^2 U(p, s) - \frac{s}{p^2-1} - \frac{1}{p^2-1} = iL_x L_t \{u_{xx}\} + \frac{1}{s(p^2-1)}$$

หารด้วย s^2 ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{s^2} U(p, s) &= \frac{s}{s^2(p^2-1)} + \frac{1}{s^2(p^2-1)} + \frac{1}{s^3(p^2-1)} + \frac{i}{s^2} L_x L_t \{u_{xx}\} \\ U(p, s) &= \frac{1}{s(p^2-1)} + \frac{1}{s^2(p^2-1)} + \frac{1}{s^3(p^2-1)} + \frac{i}{s^2} L_x L_t \{u_{xx}\} \end{aligned} \quad (2)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้าง (2)

$$u(x, t) = \sinh x + t \sinh x + \frac{t^2}{2!} \sinh x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx}\} \right] \quad (3)$$

สมมติให้คำตอบของ (3) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ดังนี้

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = (\sinh x + t \sinh x + \frac{t^2}{2!} \sinh x) + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} \right\} \right]$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = (\sinh x + t \sinh x + \frac{t^2}{2!} \sinh x) + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(u_{0xx} + u_{1xx} + \dots)\} \right]$$

จะได้ $u_0(x, t) = \sinh x + t \sinh x + \frac{t^2}{2!} \sinh x$

หา $u_1(x, t)$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{0xx}\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{i}{s^2} \left(\frac{1}{s(p^2-1)} + \frac{1}{s^2(p^2-1)} + \frac{1}{s^3(p^2-1)} \right) \right] \\ &= i \frac{t^2}{2!} \sinh x + i \frac{t^3}{3!} \sinh x + i \frac{t^4}{4!} \sinh x \end{aligned}$$

หา $u_2(x, t)$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i u_{1xx} \} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{i^2}{s^5(p^2 - 1)} + \frac{i^2}{s^6(p^2 - 1)} + \frac{i^2}{s^7(p^2 - 1)} \right] \\ &= i^2 \frac{t^4}{4!} \sinh x + i^2 \frac{t^5}{5!} \sinh x + i^2 \frac{t^6}{6!} \sinh x \end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกันกับข้างต้นจะได้

$$u_3(x, t) = i^3 \frac{t^6}{6!} \sinh x + i^3 \frac{t^7}{7!} \sinh x + i^3 \frac{t^8}{8!} \sinh x, u_4(x, t) = i^4 \frac{t^8}{8!} \sinh x + i^4 \frac{t^9}{9!} \sinh x + i^4 \frac{t^{10}}{10!} \sinh x, \dots$$

จากข้างต้นจะได้ผลเฉลยโดยประมาณของ (1) คือ

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} \right) \sinh x + \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} \sinh x$$

สรุปรูปทั่วไปของ $u_n(x, t)$ คือ

$$u_n(x, t) = i^n \sinh x \left(\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)!} \right)$$

ตัวอย่างที่3 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน1มิติแบบเชิงเส้นและไม่เอกพันธ์

$$u_{tt} = iu_{xx} - xt - x^2t^2, \quad i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x$

จากโจทย์

$$u_{tt} = iu_{xx} - xt - x^2t^2 \quad (1)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของ (1)

$$\begin{aligned} L_x L_t \{u_{tt}\} &= L_x L_t \{iu_{xx} - xt - x^2t^2\} \\ s^2 U(p, s) - su(p, 0) - u_t(p, 0) &= L_x L_t \{iu_{xx} - xt - x^2t^2\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $L_x \{u(x, 0)\} = L_x \{0\} = 0$ และ $L_x \{u_t(x, 0)\} = L_x \{x\} = \frac{1}{p^2}$ จะได้

$$s^2 U(p, s) - 0 - \frac{1}{p^2} = L_x L_t \{iu_{xx} - xt - x^2t^2\}$$

หารด้วย s^2 ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{s^2} U(p, s) &= \frac{1}{s^2 p^2} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} - xt - x^2t^2\} \\ U(p, s) &= \frac{1}{s^2 p^2} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} - xt - x^2t^2\} \end{aligned} \quad (2)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้าง (2)

$$u(x, t) = xt - \frac{xt^3}{6} - \frac{x^2t^4}{12} + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx}\} \right] \quad (3)$$

สมมติให้คำตอบของ (3) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ดังนี้

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = xt - \frac{xt^3}{6} - \frac{x^2t^4}{12} + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} \right\} \right]$$

$$u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots = xt - \frac{xt^3}{6} - \frac{x^2t^4}{12} + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(u_{0xx} + u_{1xx} + \dots)\} \right]$$

จะได้ $u_0(x, t) = xt - \frac{xt^3}{6} - \frac{x^2t^4}{12}$

หา $u_1(x, t)$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{0xx}\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \left(-\frac{t^4}{6} \right) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{-4i}{ps^7} \right] \\ &= -\frac{i}{180} t^6 \end{aligned}$$

หา $u_2(x, t)$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{1xx}\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(0)\} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

โดยวิธีการเดียวกันกับข้างต้นจะได้

$$u_3(x, t) = 0, u_4(x, t) = 0, \dots$$

จากข้างต้นจะได้ผลเฉลยของ (1) คือ

$$u(x, t) = xt - \frac{xt^3}{6} - \frac{x^2t^4}{12} - \frac{i}{180}t^6$$

ตัวอย่างที่4 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน1มิติแบบไม่เชิงเส้นและไม่เอกพันธ์

$$u_{tt} = iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2, \quad i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x$

จากโจทย์

$$u_{tt} = iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2 \quad (1)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของ (1)

$$\begin{aligned} L_x L_t \{u_{tt}\} &= L_x L_t \{iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2\} \\ s^2 U(p, s) - su(p, 0) - u_t(p, 0) &= L_x L_t \{iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $L_x \{u(x, 0)\} = L_x \{0\} = 0$ และ $L_x \{u_t(x, 0)\} = L_x \{x\} = \frac{1}{p^2}$ จะได้

$$s^2 U(p, s) - 0 - \frac{1}{p^2} = L_x L_t \{iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2\}$$

หารด้วย s^2 ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{s^2} U(p, s) &= \frac{1}{s^2 p^2} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2\} \\ U(p, s) &= \frac{1}{s^2 p^2} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2\} \end{aligned} \quad (2)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้าง (2)

$$u(x, t) = xt + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} + u + u^2 - xt - x^2t^2\} \right] \quad (3)$$

สมมติให้คำตอบของ (3) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ดังนี้

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

และพจน์ที่อยู่ในรูปไม่เชิงเส้น เขียนอยู่ในรูปพหุนามอโดเมียน

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = xt + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n - xt - x^2t^2 \right\} \right]$$

$$u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots = xt + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(u_{0xx} + u_{1xx} + \dots) + (u_0 + u_1 + \dots) + (A_0 + A_1 + A_2) - xt - x^2 t^2\} \right]$$

จะได้ $u_0(x, t) = xt$,

ห้ $u_1(x, t)$, $A_0 = u_0^2$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{0xx} + u_0 + A_0 - xt - x^2 t^2\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(0) + xt + x^2 t^2 - xt - x^2 t^2\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ห้ $u_2(x, t)$, $A_1 = 2u_0 u_1$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{1xx} + u_1 + A_1\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(0) + 0 + 2(xt)(0)\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ห้ $u_3(x, t)$, $A_2 = (2u_2)(u_0) + u_1^2$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i u_{2xx} + u_2 + A_2\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(0) + 0 + (2(0))(xt) + (0)^2\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

โดยวิธีการเดียวกันกับข้างต้นจะได้

$$u_4(x, t) = u_5(x, t) = u_6(x, t) = \dots = 0$$

จากข้างต้นจะได้ผลเฉลยของ (1) คือ

$$u(x, t) = xt$$

ตัวอย่างที่5 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน1มิติแบบไม่เชิงเส้น

$$u_{tt} = iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2, i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = 0$

จากโจทย์

$$u_{tt} = iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2 \quad (1)$$

โดยใช้การแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} L_x L_t \{u_{tt}\} &= L_x L_t \{iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2\} \\ s^2 U(p, s) - su(p, 0) - u_t(p, 0) &= L_x L_t \{iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $L_x \{u(x, 0)\} = L_x \{\sin x\} = \frac{1}{p^2+1}$ และ $L_x \{u_t(x, 0)\} = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} s^2 U(p, s) - s \left(\frac{1}{p^2+1} \right) - 0 &= L_x L_t \{iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2\} \\ U(p, s) &= \frac{1}{s(p^2+1)} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2\} \end{aligned} \quad (2)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้างของ(2)

$$u(x, t) = \sin x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} L_x L_t \{iu_{xx} + 2uu_x - u_x^2\} \right\} \quad (3)$$

สมมติให้คำตอบอยู่ในรูปแบบอนุกรม

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sin x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right]$$

โดยที่พจน์ไม่เชิงเส้นเขียนในรูปพหุนามแอดโดเมียน

$$N_1 u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ และ } N_2 u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

$$\begin{aligned} u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots &= \sin x + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i(u_{0xx} + u_{1xx} + \dots) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(A_0 + A_1 + A_2 + \dots) - (B_0 + B_1 + B_2 + \dots) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } u_0(x, t) = \sin x$$

$$\text{หาค่า } u_1(x, t) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i u_{0xx} + 2A_0 - B_0 \} \right]$$

$$u_{0xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin x = -\sin x$$

$$A_0 = u_0 u_x = \sin x \cos x$$

$$B_0 = (u_0^2)_x = (\sin^2 x)_x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ -i \sin x + 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x \} \right] \\ &= -i L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \frac{1}{s} \right) \right] \\ &= -i L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^3} \right] \\ &= -i \sin x \frac{t^2}{2!} \end{aligned}$$

$$\text{หาค่า } u_2(x, t) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i u_{1xx} + 2A_1 - B_1 \} \right]$$

$$u_{1xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right) = i \sin x \frac{t^2}{2!}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x} \\ &= \sin x \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right)_x + \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right) (\cos x) \\ &= -2i \frac{t^2}{2!} \sin x \cos x = -i t^2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 2(u_0 u_1)_x = 2 \left(\sin x \left(-i \frac{t^2}{2!} \sin x \right) \right)_x \\ &= -2i \frac{t^2}{2!} (\sin^2 x)_x \\ &= -i t^2 (2 \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i \left(i \sin x \frac{t^2}{2!} \right) - 2i t^2 \sin x \cos x - (-2i t^2 \sin x \cos x) \} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i^2 \sin x \frac{t^2}{2!} \} \right] \\ &= i^2 L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^3} \right\} \right] \\ &= i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i u_{2xx} + 2A_2 - B_2 \} \right] \\
u_{2xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \right) = -i^2 \frac{t^4}{4!} \sin x \\
A_2 &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x} \\
&= \sin x \left(i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \right)_x + \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right) \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right)_x + \left(i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \right) (\cos x) \\
B_2 &= [(2u_2)(u_0) + u_1^2]_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{2xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \right) = -i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \\
A_2 &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x} \\
&= (\sin x) \left(i^2 \cos x \frac{t^4}{4!} \right) + \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right) \left(-i \cos x \frac{t^2}{2!} \right) + \left(i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \right) (\cos x) \\
&= i^2 t^4 \sin x \cos x \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{3} i^2 t^4 \sin x \cos x \\
B_2 &= [2u_2 u_0 + u_1^2]_x \\
&= \left[2 \left(i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} \right) (\sin x) + \left(-i \sin x \frac{t^2}{2!} \right)^2 \right]_x \\
&= i^2 t^4 \left(\frac{2}{24} + \frac{1}{4} \right) (\sin^2 x)_x \\
&= \frac{1}{3} i^2 t^4 (2 \sin x \cos x) = \frac{2}{3} i^2 t^4 \sin x \cos x
\end{aligned}$$

หาค่า u_3

$$\begin{aligned}
2A_2 - B_2 &= 2 \left(\frac{1}{3} i^2 t^4 \sin x \cos x \right) - \left(\frac{2}{3} i^2 t^4 \sin x \cos x \right) = 0 \\
u_3(x, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i u_{2xx} + 0 \} \right] \\
&= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i (-i^2 \sin x \frac{t^4}{4!}) \} \right] \\
&= -i^3 \sin x \frac{t^6}{6!}
\end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกันกับข้างต้นจะได้

$$u_4(x, t) = i^4 \sin x \frac{t^8}{8!}, u_5(x, t) = -i^5 \sin x \frac{t^{10}}{10!}, \dots$$

สรุปรูปทั่วไปของ $u_n(x, t)$ คือ

$$u_n(x, t) = (-1)^n i^n \sin x \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

จากข้างต้นจะได้ผลเฉลยโดยประมาณของ(1)

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\
 &= \sin x - i \sin x \frac{t^2}{2!} + i^2 \sin x \frac{t^4}{4!} - i^3 \sin x \frac{t^6}{6!} + \dots \\
 &= \sin x \left(1 - \frac{it^2}{2!} + \frac{(it^2)^2}{4!} - \frac{(it^2)^3}{6!} + \dots \right) \\
 &= \sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่6 พิจารณาสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน2มิติแบบไม่เอกพันธ์

$$u_{tt} = \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) + (x^2 + y^2), \quad i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = x^2y^2$

จากโจทย์

$$u_{tt} = \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) + (x^2 + y^2), \quad i = \sqrt{-1} \quad (1)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของ(1)

$$\begin{aligned} L_x L_t \{u_{tt}\} &= L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) + (x^2 + y^2) \right\} \\ s^2 U(p, y, s) - su(p, y, 0) - u_t(p, y, 0) &= L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) \right\} + L_x L_t \{x^2 + y^2\} \\ \text{เนื่องจาก } L_x \{u(x, y, 0)\} &= 0, \quad L_x \{u_t(x, y, 0)\} = L_x \{x^2y^2\} \text{ จะได้} \\ s^2 U(p, y, s) - s(0) - L_x \{x^2y^2\} &= L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) \right\} + L_x L_t \{x^2 + y^2\} \\ s^2 U(p, y, s) &= L_x \{x^2y^2\} + \frac{1}{s} L_x \{x^2 + y^2\} + L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) \right\} \\ U(p, y, s) &= \frac{1}{s^2} L_x \{x^2y^2\} + \frac{1}{s^3} L_x \{x^2 + y^2\} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้างของสมการข้างต้น

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} L_x \{x^2y^2\} \right\} + L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} L_x \{x^2 + y^2\} \right\} \\ &\quad + L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) \right\} \right\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \cdot x^2y^2 = x^2y^2t$ และ $L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} \cdot (x^2 + y^2) = \frac{t^2}{2!} (x^2 + y^2)$

$$u(x, y, t) = x^2y^2t + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)t^2 + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i(x^2u_{xx} + y^2u_{yy}) \right\} \right] \quad (3)$$

สมมติให้คำตอบของ(3)อยู่ในรูปแบบอนุกรมดังนี้

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = x^2y^2t + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)t^2 + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} + y^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_{nyy} \right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)t^2 + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2}i \left(x^2 (u_{0xx} + u_{1xx} + \dots) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + y^2 (u_{0yy} + u_{1yy} + \dots) \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$u_0(x, y, t) = x^2 y^2 t + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)t^2$$

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (u_{0xx}) + y^2 (u_{0yy})) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (x^2 y^2 t + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) t^2)_{xx} + y^2 (x^2 y^2 t + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) t^2)_{yy}) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (2y^2 t + t^2) + y^2 (2x^2 t + t^2)) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (4x^2 y^2 t + (x^2 + y^2) t^2) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ 2ix^2 y^2 t + \frac{1}{2} i (x^2 + y^2) t^2 \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[L_x \left\{ 2ix^2 y^2 \right\} \left(\frac{1}{s^4} \right) + L_x \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 + y^2) \right\} \left(\frac{2}{s^5} \right) \right] \\ &= 2ix^2 y^2 \left(\frac{t^3}{3!} \right) + i(x^2 + y^2) \left(\frac{t^4}{4!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (u_{1xx}) + y^2 (u_{1yy})) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (\frac{i}{3} x^2 y^2 t^3 + \frac{i}{24} (x^2 + y^2) t^4)_{xx} + y^2 (\frac{i}{3} x^2 y^2 t^3 + \frac{i}{24} (x^2 + y^2) t^4)_{yy}) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (\frac{2i}{3} y^2 t^3 + \frac{i}{12} t^4) + y^2 (\frac{2i}{3} x^2 t^3 + \frac{i}{12} t^4)) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (\frac{4i}{3} x^2 y^2 t^3 + \frac{i}{12} (x^2 + y^2) t^4) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i^2 \frac{2}{3} x^2 y^2 t^3 i^2 \frac{1}{24} (x^2 + y^2) t^4 \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[L_x \left\{ i^2 \frac{2}{3} x^2 y^2 \right\} \left(\frac{6}{s^6} \right) + L_x \left\{ i^2 \frac{1}{24} (x^2 + y^2) \right\} \left(\frac{24}{s^7} \right) \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[L_x \left\{ i^2 4x^2 y^2 \right\} \frac{1}{s^6} + L_x \left\{ i^2 (x^2 + y^2) \right\} \frac{1}{s^7} \right] \\ &= (i^2 4x^2 y^2) \left(\frac{t^5}{5!} \right) + (i^2 (x^2 + y^2)) \left(\frac{t^6}{6!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(x, y, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (u_{2xx}) + y^2 (u_{2yy})) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (x^2 (i^2 \frac{1}{15} y^2 t^5 i^2 \frac{1}{360} t^6) + y^2 (i^2 \frac{1}{15} x^2 t^5 i^2 \frac{1}{360} t^6)) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{1}{2} i (i^2 \frac{2}{15} x^2 y^2 t^5 i^2 \frac{1}{360} (x^2 + y^2) t^6) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i^3 \frac{1}{15} x^2 y^2 t^5 i^3 \frac{1}{720} (x^2 + y^2) t^6 \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[L_x \left\{ i^3 \frac{1}{15} i x^2 y^2 \right\} \left(\frac{120}{s^8} \right) + L_x \left\{ i^3 \frac{1}{720} i (x^2 + y^2) \right\} \left(\frac{720}{s^9} \right) \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[L_x \left\{ 8i^3 x^2 y^2 \right\} \frac{1}{s^8} + L_x \left\{ i^3 (x^2 + y^2) \right\} \frac{1}{s^9} \right] \\ &= (8i^3 x^2 y^2) \left(\frac{t^7}{7!} \right) + (i^3 (x^2 + y^2)) \left(\frac{t^8}{8!} \right) \end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกันกับข้างต้นจะได้

$$u_4(x, t) = (16i^4 x^2 y^2) \left(\frac{t^9}{9!} \right) + (i^4 (x^2 + y^2)) \left(\frac{t^{10}}{10!} \right), u_5(x, t) = (32i^5 x^2 y^2) \left(\frac{t^{11}}{11!} \right) + (i^5 (x^2 + y^2)) \left(\frac{t^{12}}{12!} \right), \dots$$

สรุปทั่วไปของ $u_n(x, t)$ คือ

$$u_n(x, t) = (2^n i^n x^2 y^2) \left(\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) + (i^n (x^2 + y^2)) \left(\frac{t^{2n}}{(2n)!} \right)$$

จากข้างต้นจะได้ผลเฉลยโดยประมาณของ(1)คือ

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n i^n x^2 y^2) \left(\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) + (i^n (x^2 + y^2)) \left(\frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 สมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติไม่เชิงเส้นแบบเอกพันธ์

$$u_{tt} = i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2, \quad i = \sqrt{-1}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = e^{x+y}$

จากโจทย์

$$u_{tt} = i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2 \quad (1)$$

โดยใช้การแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง

$$L_x L_t \{u_{tt}\} = L_x L_t \{i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2\}$$

$$s^2 U(p, y, s) - sU(p, y, 0) - u_t(p, y, 0) = L_x L_t \{i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2\}$$

เนื่องจาก $L_x \{u(x, y, 0)\} = 0$ และ $L_x \{u_t(x, y, 0)\} = L_x \{e^{x+y}\} = \frac{e^y}{p-1}$ จะได้

$$s^2 U(p, y, s) - 0 - \frac{e^y}{p-1} = L_x L_t \{i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2\}$$

$$U(p, y, s) = \frac{e^y}{s^2(p-1)} + \frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2\} \quad (2)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองข้างของ (2)

$$u(x, y, t) = te^{x+y} + L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} L_x L_t \{i(u_{xx} + u_{yy}) - 2(uu_x + uu_y) + u_x^2 + u_y^2\} \right\} \quad (3)$$

สมมติให้คำตอบอยู่ในรูปแบบอนุกรม

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = te^{x+y} + L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} (u_{nxx} + u_{nyy}) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (C_n + D_n) \right\} \right]$$

โดยที่พจน์ไม่เชิงเส้นเขียนในรูปพหุนามแอตโดเมียน

$$\begin{aligned} N_1 u &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n, & N_2 u &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \\ N_3 u &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n, & N_4 u &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } u_0(x, y, t) = te^{x+y}$$

$$\text{ห้ } u_1(x, y, t) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i(u_{0xx} + u_{0yy}) - 2(A_0 + B_0) + C_0 + D_0 \} \right]$$

$$u_{0xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (te^{x+y}) = te^{x+y}$$

$$u_{0yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (te^{x+y}) = te^{x+y}$$

$$A_0 = u_0 u_{0x} = (te^{x+y})(te^{x+y})_x = t^2 e^{2(x+y)}$$

$$B_0 = u_0 u_{0y} = (te^{x+y})(te^{x+y})_y = t^2 e^{2(x+y)}$$

$$C_0 = (u_{0x})^2 = (te^{x+y})^2 = t^2 e^{2(x+y)}$$

$$D_0 = (u_{0y})^2 = (te^{x+y})^2 = t^2 e^{2(x+y)}$$

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i(te^{x+y} + te^{x+y}) \right. \\ &\quad \left. - 2(t^2 e^{2(x+y)} + t^2 e^{2(x+y)}) + (2t^2 e^{2(x+y)} + 2t^2 e^{2(x+y)}) \} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ 2ite^{x+y} \} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \left(\frac{2}{s^2} \frac{e^y}{p-1} i \right) \right] \\ &= 2 \frac{t^3}{3!} e^{x+y} i \end{aligned}$$

$$\text{ห้ } u_2(x, y, t) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \{ i(u_{1xx} + u_{1yy}) - 2(A_1 + B_1) + C_1 + D_1 \} \right]$$

$$u_{1xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(2 \frac{t^3}{3!} e^{x+y} i \right) = \frac{2it^3}{3!} e^{x+y} \quad , \quad u_{1yy} = \frac{2it^3}{3!} e^{x+y}$$

$$A_1 = u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x} = (te^{x+y}) \left(\frac{2it^3}{3!} e^{x+y} \right) + \left(\frac{2it^3}{3!} e^{x+y} \right) (te^{x+y}) = \frac{4it^4}{3!} e^{2(x+y)}$$

$$B_1 = u_0 u_{1y} + u_1 u_{0y} = \frac{4it^4}{3!} e^{2(x+y)}$$

$$C_1 = 2(u_{0x} u_{1x}) = 2(te^{x+y}) \left(\frac{2it^3}{3!} e^{x+y} \right) = \frac{8it^4}{3!} e^{2(x+y)}$$

$$D_1 = 2(u_{0y} u_{1y}) = \frac{8it^4}{3!} e^{2(x+y)}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ i \left(\frac{4it^3}{3!} e^{x+y} \right) - 2 \left(\frac{8it^4}{3!} e^{2(x+y)} \right) + \left(\frac{16it^4}{3!} e^{2(x+y)} \right) \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L_x L_t \left\{ \frac{4i^2 t^3}{3!} e^{x+y} \right\} \right] \\ &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left[\frac{4}{s^6} \cdot \frac{e^y}{p-1} i^2 \right] \\ &= \frac{4t^5}{5!} e^{x+y} i^2 \end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกันกับข้างต้น

$$u_3(x, t) = \frac{6t^7}{7!} e^{x+y} i^3, u_4(x, t) = \frac{8t^9}{9!} e^{x+y} i^4, \dots$$

จะได้รูปทั่วไปของ $u_n(x, y, t)$ คือ

$$u_n(x, y, t) = \frac{2^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{x+y} i^n$$

จากข้างต้นจะได้ผลเฉลยของ (1)

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots \\ &= t e^{x+y} + 2i \frac{t^3}{3!} e^{x+y} + 4i^2 \frac{t^5}{5!} e^{x+y} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{x+y} \end{aligned}$$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีการแปลงลาปลาซสองชั้นแบบแยกส่วน (Double Laplace Transform Decomposition Method: DLTDM) เพื่อหาคำตอบของสมการคลื่น-ชเรอดิงเงอร์ (Wave-Schrödinger Equations) ทั้งในรูปแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น รวมถึงสมการอันดับเศษส่วน สรุปผลได้ว่า ระเบียบวิธี DLTDM เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงและมีความแม่นยำในการหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) หรือผลเฉลยในรูปอนุกรมที่ลู่เข้าสู่คำตอบจริงได้อย่างรวดเร็ว โดยอาศัยจุดเด่นของการแปลงลาปลาซสองชั้นในการลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิต และใช้การแยกส่วนอดิเมียนพร้อมพหุนามอดิเมียนในการจัดการพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างเป็นระบบ ซึ่งช่วยลดความยุ่งยากซับซ้อนในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีดั้งเดิมและไม่ต้องอาศัยการประมาณค่าที่เกินความจำเป็น

บรรณานุกรม

- [1] M.R. Lommouar, L. El Hakki, On the double Laplace transform with respect to another function, Volume 194, May 2015, 126327.
- [2] Ranjit Ramkrishna Dhunde, Double Laplace Transform Method for solving Space and Time Fractional Telegraph Equations, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2016, Article ID 141459, 7 pages.
- [3] Hami Gundogdu, Omer Faruk Gozukizil, Double Laplace Decomposition Method and Exact solution of Hirota, Schrödinger and Complex m KdV Equations, Konuralp Journal of Mathematics, 7 (1) (2019) pp. 7-15.